

## 2. Técnicas de Resolução em Optimização Combinatória

3ª Aula

### 2.1. Optimização Combinatória - Introdução

### 2.2. Relaxações

Relaxação

Relaxação Linear

Relaxação Lagrangeana

### 2.3. Resolução exacta de problemas

Branch and Bound

Planos de Corte

### 2.4. Software



Instituto Superior de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

M Cândida Mourão

2010/11

Simulação e Optimização

50

DEE – Decisão Económica e Empresarial

## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

*Branch and Bound*

➤ PLI de Minimização:  $z^* = \text{Min}\{\mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S\}$

➤ Pretendemos “partir” o problema inicial em problemas mais fáceis de resolver e que nos levem à resolução do problema inicial!

➤ Decompondo  $S$  em subconjuntos mais pequenos,  $S = \bigcup_{k=1}^K S_k$

e considerando  $z^k = \text{Min}\{\mathbf{c}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_k\}$

então:  $z^* = \min_k z^k$



Instituto Superior de Economia e Gestão  
UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

M Cândida Mourão

2010/11

Simulação e Optimização

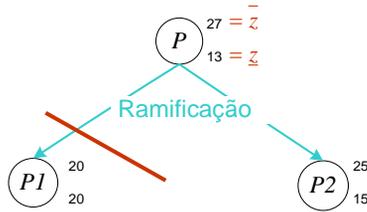
51

DEE – Decisão Económica e Empresarial

## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch and Bound

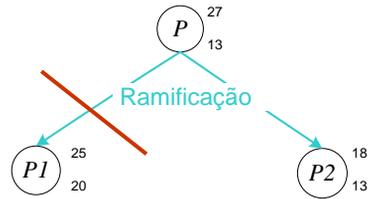
- PLI de Minimização: Cancelamento de ramificação a partir de um nodo



i. SO do subproblema

iii. Subproblema impossível!

- Obtenção dos limites para os valores de cada subproblema:
  - Majorantes – SA primais
  - Minorantes – relaxações; dualidade



ii. Subproblema de valor nunca melhor que o de  $P_2$



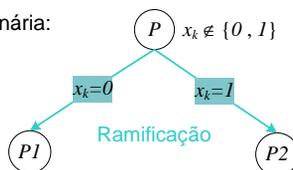
## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

### Branch and Bound

Questões:

- Como escolher os subconjuntos  $S_k$ ?
- Qual a regra de partição/ramificação?
- A partir de cada nodo devemos dividir a resolução em dois ou mais nodos?
- Por que ordem se devem analisar os subproblemas em estudo?
- Quais as regras para obtenção de limites?

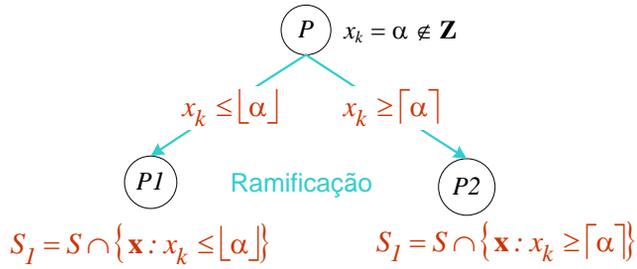
Programação Binária:



## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch and Bound

Programação Inteira:



## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

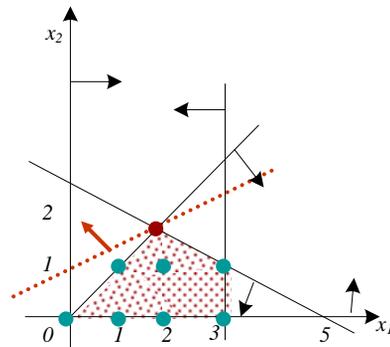
Exemplo

- Gráficamente - PLR

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 - 2x_2 \\ \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \in \mathbf{R}_0^+ \end{cases} \end{aligned}$$

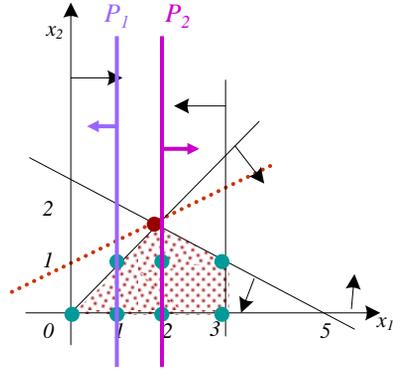
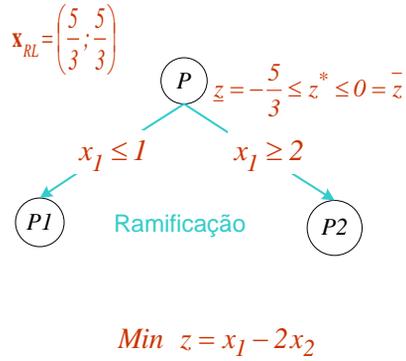
$$\mathbf{x}_{RL} = \begin{pmatrix} x_1^{RL} \\ x_2^{RL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{z} = z_{RL} = -\frac{5}{3} \leq z^* \leq 0 = z(0,0)$$



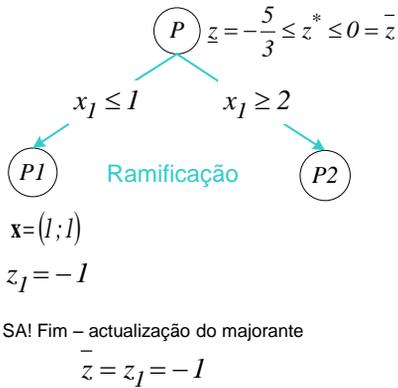
## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch and Bound



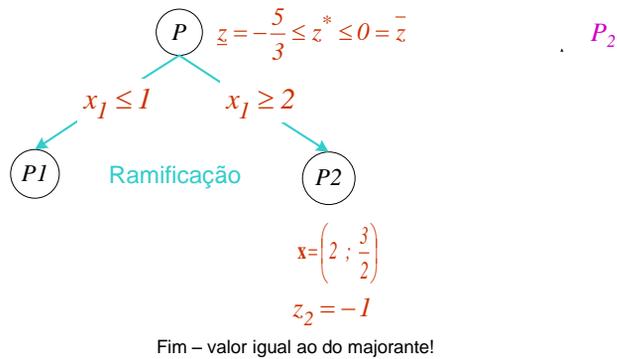
## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch and Bound



## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch and Bound



## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch and Bound

- Fazer:  $P_0 \leftarrow \text{PLR}$ ;  $S_0 \leftarrow S$ ;  $ns \leftarrow 0$  {contador do número de subproblemas}
- Resolver  $P_0$   
Se a SO de  $P_0$  é admissível de PLI, FIM (é também SO de PLI)  
c.c., criar a raiz da árvore com o subproblema  $P_0$ , e respectiva solução  
 $k \leftarrow 0$  {n.º do subproblema em análise};
- {Ramificação} Ramificar  $P_k$  em dois subproblemas:  
Seja  $x_r = \alpha \notin \mathbf{Z}$ . Incluir na árvore os dois novos subproblemas por resolver:  

$$\begin{aligned} (P_{ns+1}) \quad z_{ns+1} &= \text{Min}\{c\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_{ns+1}\} & \text{com} \quad S_{ns+1} &= S_k \cap \{\mathbf{x} : x_r \leq \lfloor \alpha \rfloor\} \\ (P_{ns+2}) \quad z_{ns+2} &= \text{Min}\{c\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S_{ns+2}\} & \text{com} \quad S_{ns+2} &= S_k \cap \{\mathbf{x} : x_r \geq \lceil \alpha \rceil\} \end{aligned}$$
Fazer  $ns \leftarrow ns + 2$ ;
- Se existirem subproblemas por resolver: resolver um qualquer desses subproblemas, seja  $P_k$ ; Ir para 4  
c.c., FIM (SO: melhor SA encontrada)
- {Limitação}  
Se  $P_k$  é impossível ou tem valor óptimo  $z_k \geq \bar{z}$  cancelar a pesquisa nesse ramo; Ir para 3  
c.c., Se a SO de  $P_k$  for SA do PLI cancelar a pesquisa nesse ramo; Ir para 5  
c.c., Ir para 2.;
- Se  $z_k < \bar{z}$  atualizar:  $\bar{z} \leftarrow z_k$  e considerar a SO de  $P_k$  como melhor SA;
- Se  $\bar{z} = \underline{z}$  FIM (a S.O. é a solução com valor  $\bar{z} = \underline{z}$ )  
c.c., Ir para 3.



## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

*Branch and Bound*

Regras:

➤ Escolha da variável para a ramificação:

➤ Variável de menor/maior índice

➤ Variável mais fraccionária:

$$\text{sendo } f_j = x_j - \lfloor x_j \rfloor$$

$$\text{escolher: } \arg \max_j \{ \min(f_j; 1 - f_j) \}$$

➤ Escolha do nodo para analisar (problema  $P_k$ ):

➤ *Depth-first*

➤ Escolher o nodo com o melhor valor de  $z_k$  (valor mais baixo)



## OPTIMIZAÇÃO INTEIRA

**Exercícios**

Resolva os dois problemas seguintes, utilizando o *branch and bound* e considerando como regra para escolha da variável de ramificação:

a) A variável mais fraccionária.

b) A variável diferente da escolhida em a) e de índice mais baixo possível.

1)  $\text{Min } z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$

$$\begin{cases} x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -2 \\ 5x_1 - x_2 + x_5 \geq 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{ inteiros} \end{cases}$$

2)  $\text{Max } z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 15 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 \leq 22 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \leq 13 \\ x_j \in \mathbf{Z}_0^+ \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

[Solver](#)

